

ÁLGEBRA DE BOOLE

- **SUMÁRIO**

- PORTAS LÓGICAS
- LÓGICA BINÁRIA
- ÁLGEBRA DE BOOLE
 - DEFINIÇÃO
 - PROPRIEDADES
 - TEOREMAS

ÁLGEBRA DE BOOLE - 3

● LÓGICA BINÁRIA

A lógica binária lida com variáveis que podem ter 2 valores distintos.

É habitual pensar em termos de valores binários e designar estes valores por 0 e 1.

► Operações Lógicas Básicas

AND		
X	Y	$X.Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR		
X	Y	$X + Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT	
X	$\bar{X}$
0	1
1	0

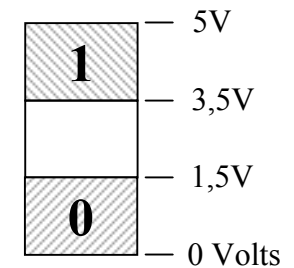
ÁLGEBRA DE BOOLE - 4

● PORTAS LÓGICAS

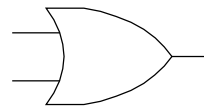
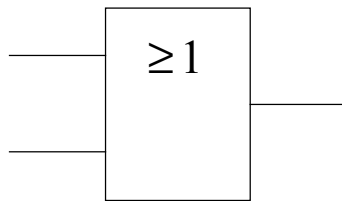
As portas lógicas são circuitos electrónicos que operam sobre um ou mais sinais de entrada para produzirem um sinal de saída.

Nas tecnologias mais comuns, o circuito lógico distingue 2 intervalos distintos de tensão, que são interpretados como 1 ou 0.

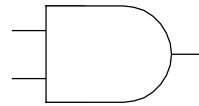
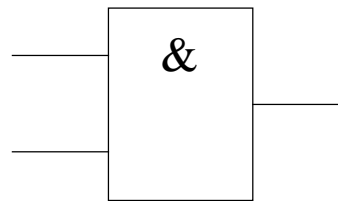
Exemplo



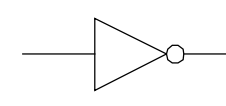
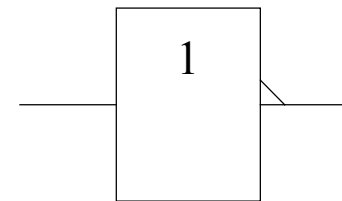
► Simbologia (IEC 617)



OR



AND



NOT

● ÁLGEBRA DE BOOLE BINÁRIA

Uma **Álgebra de Boole binária** é um **sistema algébrico** $B_2 = (A = \{0,1\}, \cdot, +)$ formado por um **conjunto gerador** A e por duas operações binárias, $\cdot, +$, designadas por **produto lógico** e **soma lógica**, e por uma operação designada por complemento, tal que:

(I) $\forall_{x,y \in A} (x \cdot y \in A) \wedge (x + y \in A)$ (**Propriedade de Fecho**)

(II) $\forall_{x,y,z \in A}$ verifica-se

A1 (**Propriedade Comutativa**)

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$x + y = y + x$$

A2 (**Propriedade Associativa**)

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

A3 (**Propriedade Distributiva**)

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

A4 (**Elemento neutro**)

$$x \cdot 1 = x$$

$$x + 0 = x$$

A5 (**Complemento**)

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

$$x + \bar{x} = 1$$

[Hist.] Boole, George (1815-1864), Matemático britânico. Em 1854, publicou “*An Investigation of the Laws of Thought*” onde descreveu um sistema algébrico mais tarde designado por *álgebra de Boole*

ÁLGEBRA DE BOOLE - 6

● PROPRIEDADES BÁSICAS DA ÁLGEBRA DE BOOLE

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$x + 1 = 1$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

$$\overline{\bar{x}} = x$$

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Comutatividade

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Associatividade

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$$

Distributividade

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$$

DeMorgan

$$x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x$$

$$(x + y) \cdot (x + \bar{y}) = x$$

Adjacência

● PRINCÍPIO DA DUALIDADE

Qualquer expressão válida numa álgebra de Boole tem uma expressão dual, também válida nessa álgebra, que se obtém por troca do símbolo operatório $+$ com o símbolo operatório $\cdot$ e do limite universal **0** com o limite universal **1**.

► Exemplo:

$x \cdot 1 = x$ é a expressão dual de $x + 0 = x$

Outros teoremas da Álgebra de Boole:

Absorção $x \cdot (x + y) = x$

Consenso $x \cdot y + y \cdot z + \bar{x} \cdot z = x \cdot y + \bar{x} \cdot z$

$$(x + y) \cdot (\bar{x} + z) = x \cdot z + \bar{x} \cdot y$$

$$x \cdot y + x \cdot \bar{y} \cdot z = x \cdot y + x \cdot z$$

$$x + x \cdot y = x$$

$$(x + y) \cdot (y + z) \cdot (\bar{x} + z) = (x + y) \cdot (\bar{x} + z)$$

$$x \cdot y + \bar{x} \cdot z = (x + z) \cdot (\bar{x} + y)$$

$$(x + y) \cdot (x + \bar{y} + z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

ÁLGEBRA DE BOOLE - 8

● FUNÇÃO BOOLEANA

$$f = \bar{a}b + c$$

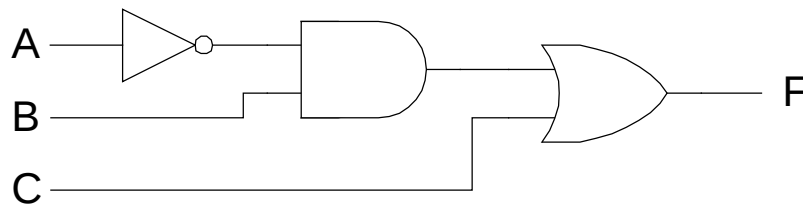
$\bar{a}b$ e c são os **termos** da função.

$\bar{a}$, b e c são os **literais**.

Tabela da Verdade

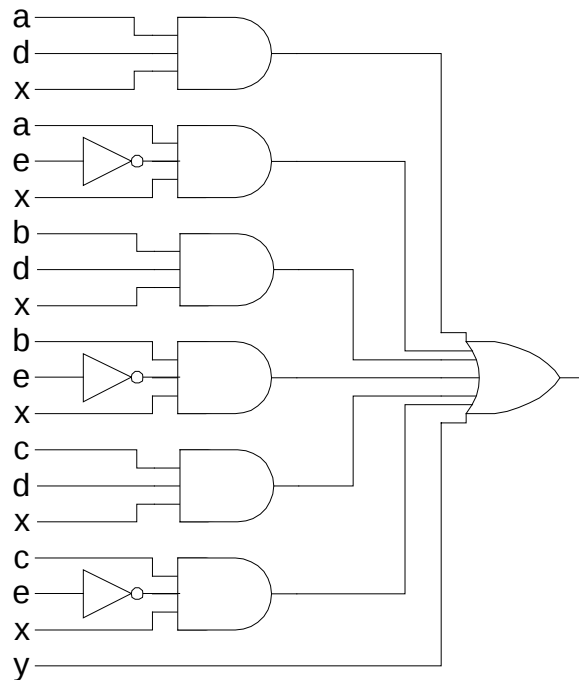
a	b	c	$\bar{a}b$	f
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

► Circuito Lógico



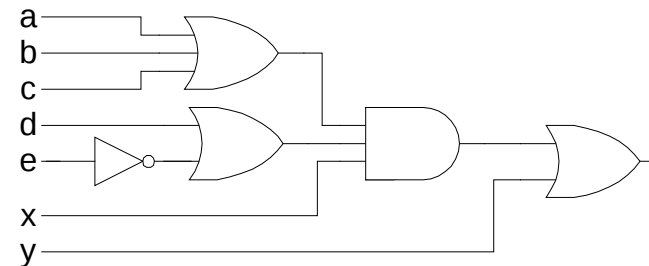
● SIMPLIFICAÇÃO ALGÉBRICA

► Exemplo



**Realização a 2 níveis
(soma de produtos)**

$$\begin{aligned}
 f &= adx + a\bar{e}x + bdx + b\bar{e}x + cdx + c\bar{e}x + y \\
 &= (ad + a\bar{e} + bd + b\bar{e} + cd + c\bar{e})x + y \\
 &= ((a + b + c)d + (a + b + c)\bar{e})x + y \\
 &= ((a + b + c)(d + \bar{e}))x + y
 \end{aligned}$$



Realização Multinível

ÁLGEBRA DE BOOLE - 10

● LEIS DE MORGAN

Verificação por Tabelas da Verdade

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

x	y	x + y	$\overline{x + y}$	x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	0

► Generalização para n variáveis

$$\overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \dots \overline{x_n}$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_n}$$

● LEIS DE DEMORGAN

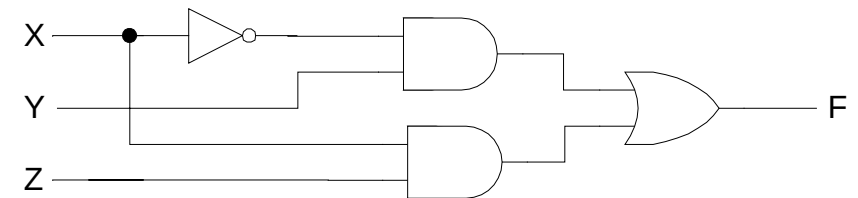
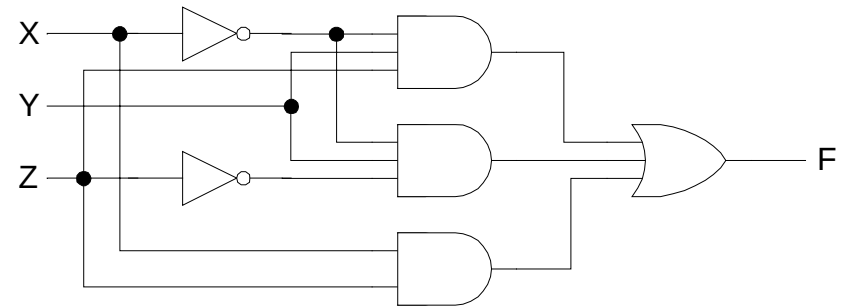
► Exemplo de Aplicação Sucessiva das Leis de DeMorgan

$$\begin{aligned}\overline{a \cdot (b + z \cdot (x + \bar{a}))} &= \boxed{\bar{a}} + \boxed{(b + z \cdot (x + \bar{a}))} \\ &= \bar{a} + \boxed{\bar{b}} \cdot \boxed{(z \cdot (x + \bar{a}))} \\ &= \bar{a} + \boxed{\bar{b}} \cdot \boxed{\bar{z}} + \boxed{(x + \bar{a})} \\ &= \bar{a} + \boxed{\bar{b}} \cdot \boxed{(z + \boxed{x} \cdot \boxed{a})} \\ &= \bar{a} + \bar{b} \cdot (\bar{z} + \bar{x} \cdot a)\end{aligned}$$

● TEOREMA DA ADJACÊNCIA

► Exemplo de Simplificação

$$\begin{aligned}f &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz \\&= \bar{x}y(z + \bar{z}) + xz \\&= \bar{x}y.1 + xz \\&= \bar{x}y + xz\end{aligned}$$



BIBLIOGRAFIA

**[1] M. Morris Mano, Charles R. Kime, “Logic and Computer Design Fundamentals”,
Prentice-Hall International, Inc. (Capítulo 2, Secções 2.1-2.2)**